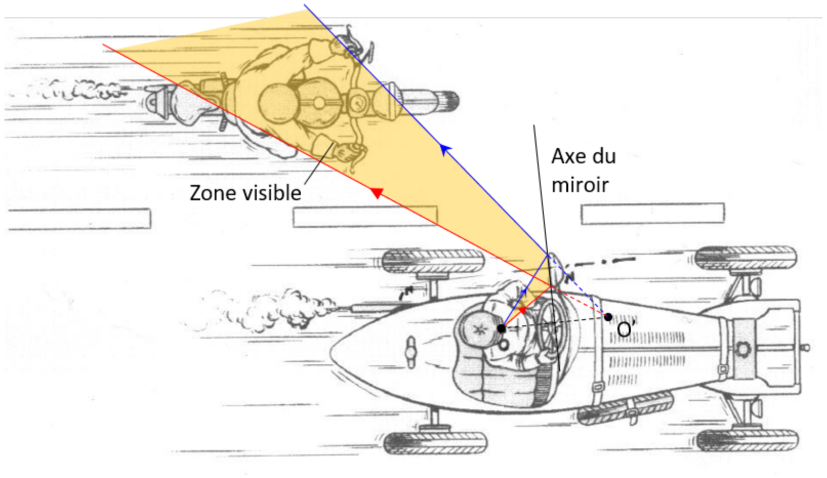
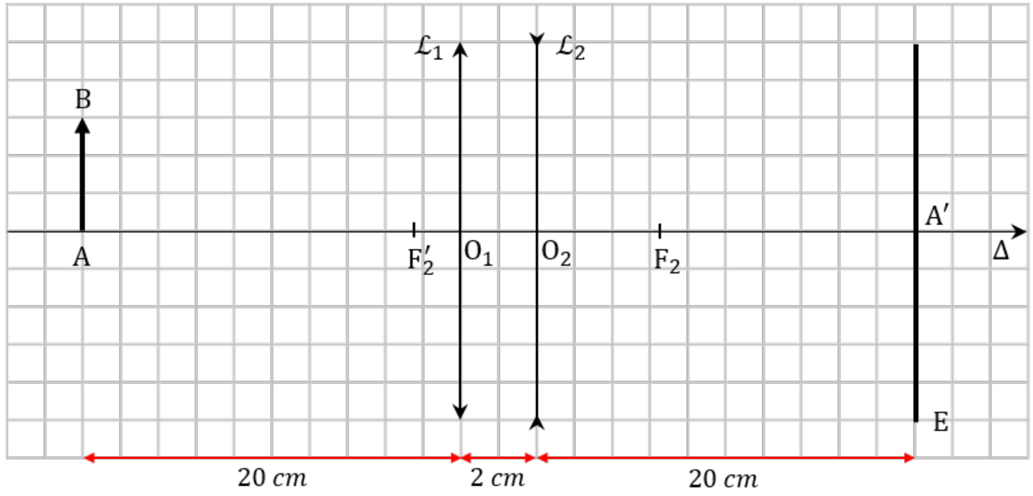
Exercice n°1 • Angle mort — cours

Oui, le motard est visible dans le rétroviseur. En revanche, s'il avance légèrement, il passera dans l'angle mort.



Exercice n°2 • Photocopieur (ancien modèle) — *cours*

1) 1 carreau = 2 cm



2) On a :

$$A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'$$

On applique la relation de conjugaison entre A_1 et A'.

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_2A_1} = \left(\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{f_2'}\right)^{-1} = 4,91 \text{ cm}}$$

3) On applique la relation de conjugaison entre A et A_1 .

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_1' = \left(\frac{1}{\overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}}\right)^{-1} = 5,13 \text{ cm}}$$

4) On a :

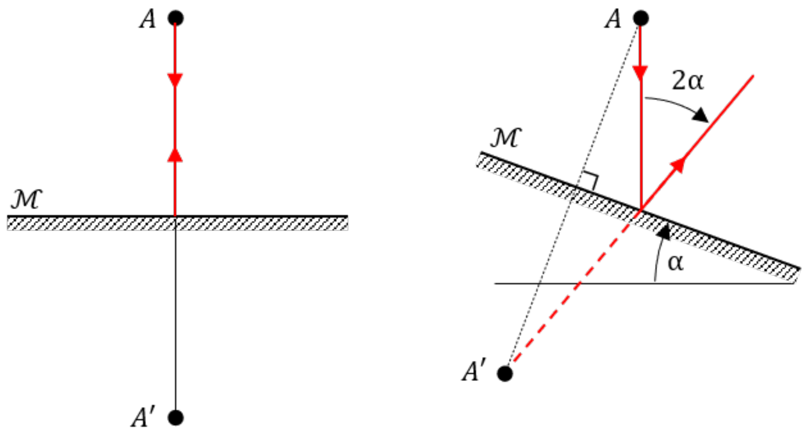
$$\gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \cdot \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = -1,41 \simeq \boxed{-\sqrt{2}}$$

On obtient en sorti un format A3.

5) Après translation de $\mathcal{L}_3$ vers $\mathcal{L}_2$, on remarque que la situation est identique au schéma de la question 1, avec $A'B'$ l'objet et AB l'image. Ainsi, $A'B'$ est $\sqrt{2}$ fois plus petit que AB. D'après le principe de retour inverse de la lumière, si AB est l'objet, alors $A'B'$ est l'image, de taille $\sqrt{2}$ fois plus petite. C'est donc un format A5.

Exercice n°3 • Rotation d'un miroir ★☆☆

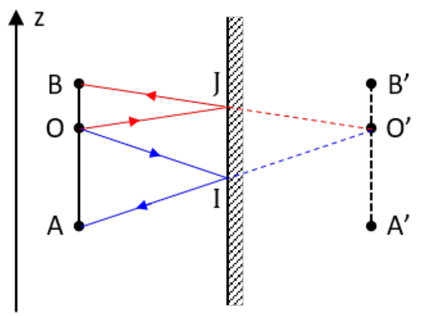
1) et 2)



3) L'angle vaut 2α.

Exercice n°4 • Taille du miroir ★★☆

On note O la position des yeux de l'homme.



Pour se voir en entier, le miroir doit mesurer au minimum :

$$d_{min} = z_J - z_I = \frac{z_B - z_O}{2} - \frac{z_O - z_A}{2} = \frac{L}{2}$$

Cela correspond à la moitié de la taille de l'homme. Cette longueur ne dépend pas de la distance au mur.

Exercice n°5 • Questions diverses sur les lentilles ★★☆

1) Avec $\gamma = -4$ (dans la configuration : objet réel $\rightarrow$ image réelle, une lentille convergente inverse l'image) et $f' = 30$ cm, on a :

$$\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FO} + \overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} = \frac{\overline{FO}}{\gamma} - \overline{FO} = f'\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = \boxed{-38 \text{ cm}}$$

Il faut placer l'objet 38 cm devant de centre optique de la lentille.

2) On a :

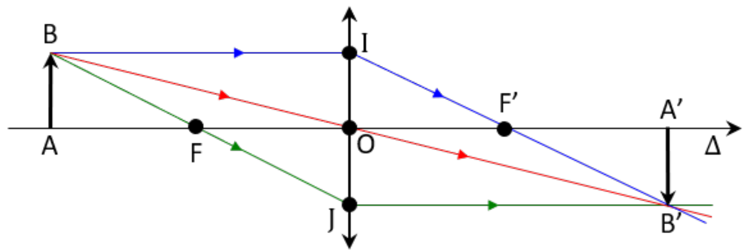
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -1 = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Ainsi,

$$\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'A'} = \underbrace{\overline{FO}}_{f'} + \underbrace{\overline{FF'}}_{2f'} + \underbrace{\overline{OF'}}_{f'} = \boxed{4f'}$$

3) On peut utiliser une première lentille mince convergente $\mathcal{L}_1$ afin de former une image (intermédiaire) réelle inversée A_1B_1, puis une deuxième lentille mince convergente $\mathcal{L}_2$ afin de former une image réelle droite A_2B_2. Il faut cependant que $\overline{AF_1} > 0$ et $\overline{A_1F_2} > 0$.

4) Notations :



On applique le théorème de Thalès dans les triangles semblables OAB et $OA'B'$ (en faisant attention aux conventions de signe !) :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \boxed{\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

On applique le théorème de Thalès dans les triangles semblables FAB et FOJ :

$$\left(\frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right) = \boxed{\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}}$$

On applique le théorème de Thalès dans les triangles semblables OIF' et $F'A'B'$:

$$\left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right) = \boxed{\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}}$$

5) On utilise les formules du grandissement :

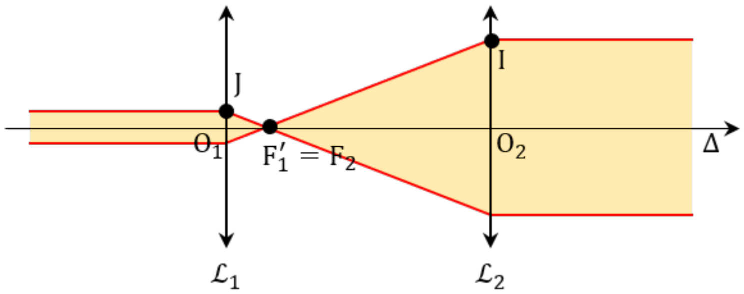
$$\begin{aligned}
\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \quad & \Rightarrow \quad 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 1 - \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \\
& \Rightarrow \quad 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OF'} + \overline{F'A'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OF'}} \\
& \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}
\end{aligned}$$

Exercice n°6 • Système afocal ★★☆

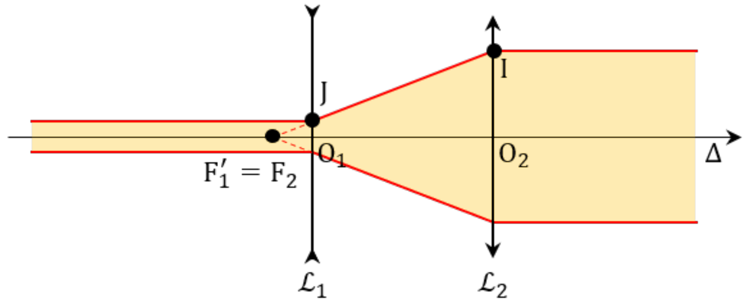
1) Par définition d'un système afocal :

$$A\,(-\infty) \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'\,(+\infty)$$

Le foyer image de la première lentille doit être confondu avec le foyer objet de la deuxième. Schéma avec deux lentilles convergentes :



2) Schéma avec une lentille convergente et une lentille divergente :



3) On appelle d le diamètre initial du faisceau et D le diamètre final. On applique le théorème de Thalès dans les triangles F_2IO_2 et F_2O_1J :

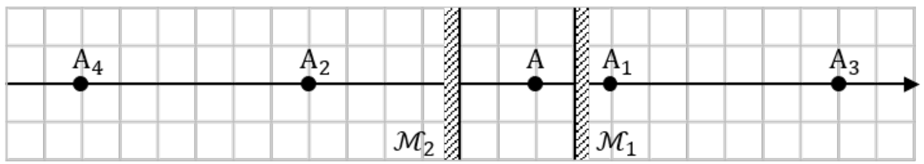
$$\frac{-\overline{F_1'O_1}}{\overline{F_2O_2}} = \frac{\overline{O_1J}}{\overline{O_2I}} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{d/2}{D/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_1' = f_2'\frac{d}{D} = 5\text{ mm}}$$

Les deux lentilles sont séparées d'une distance :

$$\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2' = \boxed{55\text{ mm}}$$

Exercice n°7 • Association de deux miroirs ★★⯪

1) On utilise le fait que le point image est le symétrique du point objet par rapport au miroir. Ainsi, la distance objet/ image est le double de la distance objet/miroir. Attention, les distances sont algébriques.



$$\overline{AA_1} = \boxed{2x}$$

$$\overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = \underbrace{\overline{AA_1}}_{2x} + 2\underbrace{\overline{A_1\mathcal{M}_2}}_{-(d+x)} = \boxed{-2d}$$

$$\overline{AA_3} = \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3} = \underbrace{\overline{AA_2}}_{-2d} + 2\underbrace{\overline{A_2\mathcal{M}_1}}_{2d+x} = \boxed{2d + 2x}$$

$$\overline{AA_4} = \overline{AA_3} + \overline{A_3A_4} = \underbrace{\overline{AA_3}}_{2d+2x} + 2\underbrace{\overline{A_3\mathcal{M}_2}}_{-(3d+x)} = \boxed{-4d}$$

2) On en déduit :

$\boxed{\overline{AA_n} = -nd}$ si n est pair

$\boxed{\overline{AA_n} = (n-1)\,d + 2x}$ si n est impair

On observe donc une infinité d'images.

3) L'ensemble des images se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon OA. Ainsi (on remarquera la ressemblance avec le cas précédent) :

$$\varphi_1 = \left(\widehat{OA, OA_1}\right) = 2\left(\widehat{OA, \mathcal{M}_1}\right) = \boxed{2\theta}$$

$$\varphi_2 = \left(\widehat{OA, OA_1}\right) + \left(\widehat{OA_1, OA_2}\right) = \underbrace{\left(\widehat{OA, OA_1}\right)}_{2\theta} + 2\underbrace{\left(\widehat{OA_1, \mathcal{M}_2}\right)}_{-(\theta+\alpha)} = \boxed{-2\alpha}$$

$$\varphi_3 = \left(\widehat{OA, OA_2}\right) + \left(\widehat{OA_2, OA_3}\right) = \underbrace{\left(\widehat{OA, OA_2}\right)}_{-2\alpha} + 2\underbrace{\left(\widehat{OA_2, \mathcal{M}_1}\right)}_{2\alpha+\theta} = \boxed{2\theta + 2\alpha}$$

$$\varphi_4 = \left(\widehat{OA, OA_3}\right) + \left(\widehat{OA_3, OA_4}\right) = \underbrace{\left(\widehat{OA, OA_3}\right)}_{2\theta+2\alpha} + 2\underbrace{\left(\widehat{OA_3, \mathcal{M}_2}\right)}_{-(3\alpha+\theta)} = \boxed{-4\alpha}$$

On en déduit :

$\boxed{\varphi_n = -n\alpha}$ si n est pair

$\boxed{\varphi_n = (n-1)\,\alpha + 2\theta}$ si n est impair

4) Si $\alpha = \pi/p$, alors :

$$\varphi_n = -\frac{n}{p}\pi \qquad \text{et} \qquad \varphi_{2p+n} = -\frac{2p+n}{p} = \varphi_n - 2\pi$$

On en déduit que l'image n° $2p$ est superposée à l'image n° 0 (c'est-à-dire l'objet). Il y a donc $\boxed{2p}$ images uniquement (en comptant l'objet !). Cela se confirme avec les cas où $p = 1$ (cas du miroir plan : un objet et une image) et $p = 2$ (cas du miroir en angle droit, vu en cours).

Exercice n°8 • Lois de Descartes appliquées aux lentilles minces ★★★

1) On se place dans le triangle CIJ rectangle en J et on obtient à l'aide d'angles alternes-internes :

$$\sin(i_1) = \frac{y}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1 = \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)}$$

2) On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsque l'on passe d'un milieu donné vers un milieu moins réfringent, ce qui est bien le cas ici. L'angle limite est donné par la formule :

$$i_{1,lim} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{lim} = R\sin(i_{1,lim}) = \frac{R}{n}}$$

3) 3) Loi de Snell-Descartes de la réfraction :

$$\sin(i_2) = n\sin(i_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{ny}{R}\right)}$$

4) On a :

$$\boxed{D = i_2 - i_1}$$

5) Dans le triangle JIF', l'angle en F' vaut D :

$$\tan(D) = \frac{JI}{JF'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{JF'} = \frac{y}{\tan(D)} = \frac{y}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{ny}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right)}}$$

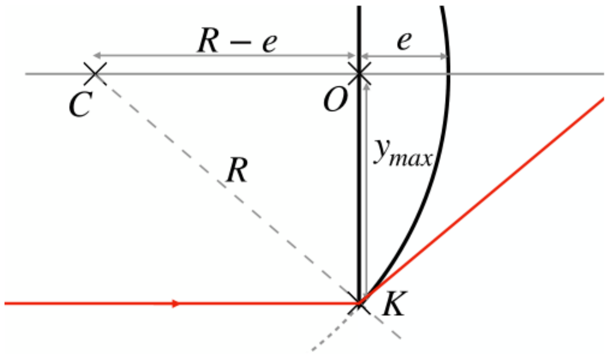
6) Finalement,

$$\begin{aligned} f' &= \overline{OF'} \\ &= \overline{OC} + \overline{CJ} + \overline{JF'} \\ &= (e - R) + R\cos(i_1) + \overline{JF'} \\ &= e + R\left[\cos\left(\arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right) - 1 + \frac{y/R}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{ny}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{R}\right)\right)}\right] \end{aligned}$$

7) On en déduit que :

$$f'_0 = e + \lim_{y\to 0}\left(\frac{y/R}{ny/R - y/R}\right) = \boxed{e + \frac{R}{n-1}}$$

8) On réalise le schéma suivant :



Puis on applique le théorème de Pythagore dans le triangle KCO :

$$R^2 = (R-e)^2 + y_{max}^2 \Rightarrow y_{max} = \sqrt{R^2 - (R-e)^2} = \sqrt{2Re - e^2} = \sqrt{2kR^2 - k^2R^2} = kR\sqrt{\frac{2}{k} - 1}$$

9) On a :

$$\boxed{f'_0 = e + \frac{R}{n-1} = R\left(k + \frac{1}{n-1}\right)}$$

De plus,

$$f'_{max} = e + R \cdot g_n\left(\frac{y_{max}}{R}\right) = R\left(k + g_n\left(\frac{y_{max}}{R}\right)\right) = \boxed{R\left[k + g_n\left(k\sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)\right]}$$

On en déduit :

k	$1/10$	$1/50$	$1/150$
f'_0	$2,1$ m	$2,02$ m	$2,007$ m
y_{max}/R	$0,44$	$0,20$	$0,12$
f'_{max}	$1,16$ m	$1,92$ m	$1,98$ m

10) La première épaisseur correspond à $k = 1/10$. L'écart relatif de la distance focale image vaut :

$$\frac{2,1 - 1,6}{1,6} = 30\%$$

La condition associée au stigmatisme approchée n'est pas remplie pour cette lentille
La deuxième épaisseur correspond à $k = 1/150$. L'écart relatif de la distance focale image vaut :

$$\frac{2,007 - 1,98}{1,98} = 1,4\%$$

Cette fois ci, la condition est remplie.

11) Relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

12) On considère la transformation suivante :

$$A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2$$

Alors, la relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

En sommant les deux :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

On retrouve une relation de conjugaison analogue, pour la transformation : $A \xrightarrow{\mathcal{L}_{eq}} A_2$, où $\mathcal{L}_{eq}$ est une lentille de distance focale :

$$\boxed{\frac{1}{f'_{eq}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}}$$

13) Le théorème des vergences donne :

$$f' = \left(\frac{1}{f'_g} + \frac{1}{f'_d}\right)^{-1} = \left(\frac{n-1}{R_g} + \frac{n-1}{R_d}\right)^{-1} = \frac{1}{n-1}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$